13-Дәріс

<u>Тақырыбы</u>: Асимптоталар. Функцияны туынды көмегімен толық зерттеу және графигін құру.

Функция графигінің асимптоталары

А**нықтама.** *Егер* $y = f(x)$ *функциясының графигіндегі* $M(x, f(x))$ *нүктесі координата бас нүктесінен шексіз алшақтағанда осы* M *нүктесінен* $y = kx + b$ *түзуіне дейінгі қашықтық нөлге ұмтылса,* $y = kx + b$ *түзуі* $f(x)$ *- тің графигінің* ***асимптотасы*** *деп аталады.*

Мұнда екі жағдай болуы мүмкін:

1) $M(x, f(x))$ нүктесінің абциссасы x ақырлы a санына ұмтылады. Онда $x = a, \quad y > 0$ немесе $x = a, \quad y < 0$ жартылай түзуі **вертикаль асимптота** болады;

2) $M(x, f(x))$ нүктесінің абциссасы $x \to +\infty$ немесе $x \to -\infty$ ұмтылады. Онда $y = kx + b$ **көлбеу асимптота** деп аталады.

Теорема-1 (вертикаль асимптота туралы). $x = a$ түзуі вертикаль асимптота болуы үшін

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \text{ немесе } \lim_{x \to a-0} f(x)$$

шектерінің ең болмағанда біреуі шексіз үлкен болуы қажетті және жеткілікті.

Ескерту. Вертикаль асимптотаны анықтайтын $x = a$ саны функциясының үзіліс (екінші ретті) нүктелерінің ішінде.

Егер $y = f(x)$ - үзіліссіз функция болса, онда вертикаль асимптота жоқ.

Теорема-2 (көлбеу асимптота туралы). $y = kx + b$ түзуі $y = f(x)$ функциясының көлбеу асимптотасы болуы үшін

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ және } b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right] \qquad (4)$$

шектерінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

(мұнда $x \to +\infty$ ұмтылғандағы шек **оң жақ көлбеу асимптота,** ал $x \to -\infty$ ұмтылғандағы шек **сол жақ көлбеу асимптота** үшін қарастырылады)

Функцияны зерттеу схемасы және оның графигін салу

Функцияны зерттеп, оның графигін салу жұмысын келесі ретпен жүргізуді ұсынуға болады.

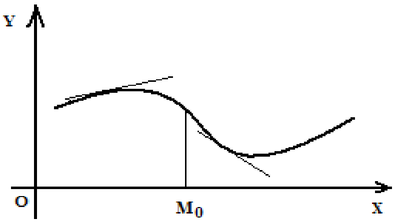
1. Функцияның анықталу аймағын анықтау. Оны жұп, тақ, периодтылықты зерттеу. Графиктің координата өстерімен қиылысу нүктелерін табу;
2. Функцияны үзіліссіздікке зерттеу.
3. Функцияның асимптоталарын табу.
4. Өсу, кему аралықтарын, экстремумдерді табу.
5. Ойыс, дөңес аралықтарын, иілу нүктелерін табу.
6. Табылған үзіліс нүктелерін, күдікті нүктелерді олардың арасындағы аралықтарды (интервалдарды) көрсетіп кесте (таблица) салу. Әрбір аралықта функцияның сипаты көрсетіледі.

Қажет болған жағдайда (дәлірек график үшін) функцияның аралық мәндерін таба отырып функция графигінің эскизін салу

Функцияның ойыс-дөңестігі. Иілу нүктесі.

Егер x_0 нүктесінің кез келген аймағында қисық өзіне жүргізілген жанамадан жоғары (төмен) жататын болса, онда қисықты сол аймақта *ойыс (дөңес)* деп атайды.

Қисықтың ойыстығы дөңестікке және, керісінше, дөңестігі ойыстыққа ауысатын нүктесі *иілу нүктесі* делінеді (3.3 Сурет).



3.3 Сурет

Ф у н к ц и я   г р а ф и г і н і ң   о й ы с – д ө ң е с т і г і н і ң   ж е т к і л і к т і   ш а р т ы. Егер $(a;b)$ интервалында $f'(x) > 0$ болса, онда осы интервалда функция графигі ойыс болады; егерфункция $f'(x) < 0$ болса, онда осы интервалда графигі - дөңес.

И і л у   н ү к т е с і н і ң   қ а ж е т т і   ш а р т ы. Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының үзіліссіз екінші ретті туындысы бар және x_0 иілу нүктесі болса, онда $f'(x_0) = 0$ (немесе $f'(x_0)$ анықталмайтын) болады.

$f'(x) = 0$ болатын немесе $f'(x)$ анықталмайтын нүктелер *II текті кризистік нүктелер* делінеді.

И і л у   н ү к т е с і н і ң   ж е т к і л і к т і   ш а р т т а р ы.

I. Егер $y = f(x)$ функциясының x_0 - үзіліссіз II текті кризистік нүктесі болса және сол нүктеден өткенде $f'(x)$ таңбасын (+)-тен (-)-ке, не, керісінше, (-)-тен (+)-ке өзгертсе, онда x_0 иілу нүктесі болады.

II. Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде үзіліссіз үшінші ретті туындысы бар және $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) \neq 0$ болса, онда x_0 берілген функцияның иілу нүктесі болады.

507. $y = x^5 + 5x - 6$ функция графигінің ойыс және дөңес аралықтарын табу керек.

Шешуі: $y' = 5x^4 + 5 \Rightarrow y'' = 20x^3.$ Егер $x < 0,$ онда $y'' < 0,$ яғни қисық – дөңес; егер $x > 0,$ онда $y'' > 0,$ ягни қисық – ойыс. Сонымен, қисық $(-\infty; 0)$ аралығында дөңес, ал $(0; +\infty)$ аралығында ойыс. ▲

508. $y = (x+1)^2 \cdot (x-2)$ функциясының экстремумдарын және оның графигінің иілу нүктелерін табу керек.

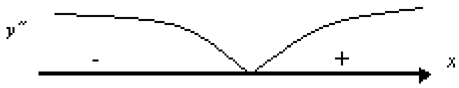
Шешуі: $y' = 2(x+1)\cdot(x-2) + (x+1)^2 = 3(x^2 - 1).$ Бірінші туындының түбірлері: $x_1 = -1; x_2 = 1.$

Екінші туындыны табайық: $y'' = 6x.$ Кризистік нүктелердегі екінші туындының мәндерін табайық:

$$y''(-1) = -6 < 0, \text{ яғни } y_{\max} = 0; \quad y''(1) = 6 > 0, \text{ яғни } y_{\min} = -4.$$

Енді иілу нүктесін табайық, ол үшін екінші туындыны нөлге теңестіреміз:

$$6x = 0 \Rightarrow x = 0.$$



дөңес 0 ойыс

$x = 0$ нүктесінен өткенде y'' таңбасы (-)-тен (+)-ке өзгереді, яғни дөңестік ойыстыққа ауысады, сондықтан $y(0) = -2$ нүктесі – иілу нүктесі болады.